

BORNES SUR LE NOMBRE DE POINTS RATIONNELS DES COURBES : EN QUÊTE D'UNIFORMITÉ

FABIEN PAZUKI

Résumé. L'objectif de ce texte est de montrer en détails comment un résultat conjectural de minoration de hauteur de type Lang-Silverman permet d'obtenir une borne explicite et uniforme sur le nombre de points rationnels d'une courbe de genre $g \geq 2$ sur un corps de nombres.

Mots-Clefs : Points rationnels, courbes algébriques, géométrie diophantienne.

Bounds on the number of rational points on curves: seeking for uniformity.

Abstract. The aim of this paper is to show how a conjectural lower bound on the canonical height function in the spirit of Lang and Silverman leads to an explicit uniform bound on the number of rational points on curves of genus $g \geq 2$ over a number field.

Keywords: Rational points, algebraic curves, diophantine geometry.

Mathematics Subject Classification: 11G50, 14G40.

1. INTRODUCTION

Soit C une courbe projective lisse de genre $g \geq 2$ définie sur un corps de nombres K . La conjecture de Mordell, qui est depuis 1983 un théorème célèbre de Faltings [Fa83], donne la finitude de l'ensemble des points K -rationnels $C(K)$. Une question naturelle a alors émergé : à quel point le cardinal $\#C(K)$ dépend-il de la courbe C ? Est-il possible de produire un majorant explicite de $\#C(K)$ et à quel point ce majorant peut-il être uniforme ? C'est à cette question d'uniformité du majorant que ce texte est consacré.

On sait produire depuis Rémond [Rém00] des bornes totalement explicites et inconditionnelles. Citons une forme plus récente de son résultat, donnée dans [Rém10].

Théorème 1.1. *Soit C une courbe lisse, projective, géométriquement connexe et de genre $g \geq 2$ définie sur un corps de nombres K . On fixe un plongement projectif de la variété jacobienne $Jac(C)$ relatif à la puissance seizième d'un translaté du diviseur thêta. Alors on a*

$$\#C(K) \leq (2^{38+2g} \cdot [K : \mathbb{Q}] \cdot g \cdot \max\{1, h_\theta\})^{(m_K+1) \cdot g^{20}},$$

où h_θ est la hauteur thêta de $Jac(C)$ dans ce plongement et m_K est le rang de Mordell-Weil de $Jac(C)(K)$.

L'auteur remercie Gaël Rémond pour ses commentaires précis et précieux. Merci à Amos Turchet pour ses remarques. L'auteur est soutenu par la Chaire DNRN Niels Bohr de Lars Hesselholt et le Projet ANR-14-CE25-0015 Gardio.

On cherche à savoir dans quelle mesure on peut se passer de la dépendance en la jacobienne de la courbe dans l'expression du majorant. L'uniformité la plus forte est conjecturée par Caporaso, Harris, Mazur en page 2 de [CaHaMa97] :

Conjecture 1.2. *Soit g un entier naturel et K un corps de nombres. Il existe une quantité $c_0(g, K) > 0$ telle que pour toute courbe projective lisse C de genre $g \geq 2$ définie sur K , on a*

$$\#C(K) \leq c_0(g, K).$$

Ce dernier énoncé est impliqué par une conjecture très ambitieuse de Bombieri et Lang via un procédé dit de corrélation qui est bien expliqué dans [CaHaMa97]. Ce niveau d'uniformité maximal peut sembler difficile à atteindre. On pourra essayer dans un premier temps de répondre à la question classique suivante (trouvée par exemple dans [DaNaPh07] page 102).

Conjecture 1.3. *Soit g un entier naturel et K un corps de nombres. Il existe une quantité $c_1(g, K) > 0$ telle que pour toute courbe projective lisse C de genre $g \geq 2$ définie sur K , on a*

$$\#C(K) \leq c_1(g, K)^{m_K+1},$$

où m_K est le rang de Mordell-Weil de la jacobienne de C sur K .

Citons aussi une version plus souple de la conjecture 1.3 et trouvée sous forme de question dans [Maz00] page 223 (voir aussi le premier paragraphe de la page 234 de [Maz86]) :

Conjecture 1.4. *Soit g un entier naturel, soit K un corps de nombres, soit m un entier naturel. Il existe une quantité $c_2(g, K, m) > 0$ telle que pour toute courbe projective lisse C de genre $g \geq 2$ définie sur K , dont le rang de Mordell-Weil de la jacobienne de C sur K est m , on a*

$$\#C(K) \leq c_2(g, K, m).$$

David, Nakamaye et Philippon donnent dans le théorème 3.6 page 118 de [DaNaPh07] une infinité de familles de courbes définies sur \mathbb{Q} et vérifiant la conjecture 1.3 (une infinité de familles est proposée pour chaque $g \geq 4$ fixé). Notons qu'il est classique de penser que la dépendance en le corps K des quantités c_0, c_1, c_2 ne fait intervenir que le degré de K .

De nouveaux progrès, suivant une approche de ces questions basée sur l'intégration p -adique, concernent les courbes telles que la jacobienne $\text{Jac}(C)$ possède un rang de Mordell-Weil sur K petit par rapport au genre de C . Initiée par des idées de Chabauty, puis de Coleman, la stratégie p -adique de majoration du cardinal de $C(K)$ fait voir le jour à un résultat d'uniformité par Stoll [Sto15] qui traite des courbes hyperelliptiques. Cette attaque a été généralisée depuis à toutes les courbes (pour $g \geq 3$) dans [KaRaZu15] par Katz, Rabinoff, Zureick-Brown, dont voici le résultat :

Théorème 1.5. *Soit $d \geq 1$ et $g \geq 3$ des entiers. Il existe une constante $c_3(g, d) > 0$ telle que pour tout corps de nombres K de degré d et pour toute courbe projective lisse C définie sur K telle que le rang m_K de la jacobienne $\text{Jac}(C)$ sur K vérifie $m_K \leq g-3$, on a $\#C(K) \leq c_3(g, d)$.*

Notons que la quantité $c_3(g, d)$ peut être explicitée, comme cela est proposé dans les textes [Sto15] et [KaRaZu15]. Comme dans tous les cas d'applications de la méthode Chabauty-Coleman, on s'attend à ce que la dépendance en le paramètre g soit polynomiale, voire quasi-linéaire.

Remarque 1.6. Le théorème [KaRaZu15] pourra donc être vu comme un pas vers la conjecture 1.2, ou comme un pas vers les conjectures 1.3 ou 1.4. En effet la conjecture 1.3 (ou la

conjecture 1.4) combinée à une inégalité du type $m_K \leq c_4(g)$ pour une constante $c_4(g) > 0$ ne dépendant que de g impliquent la conjecture 1.2 *restreinte aux courbes dont la jacobienne vérifie* $m_K \leq c_4(g)$ bien entendu.

Remarque 1.7. La conjecture 1.3 ou la conjecture 1.4 couplée à une borne uniforme sur le rang de la forme $m_K \leq c(g, K)$ implique bien entendu la conjecture 1.2. La question de savoir si le rang des variétés abéliennes de dimension fixée $g \geq 1$ sur un corps de nombre fixé K est borné uniformément est un problème encore largement ouvert. De récents travaux [BhSh15] tendent à suggérer qu'une borne uniforme est plausible pour les courbes elliptiques sur \mathbb{Q} .

Nous allons montrer en détails dans ce texte qu'une conjecture de minoration de hauteur dans l'esprit Lang-Silverman implique aussi la conjecture 1.3, sans besoin d'hypothèse sur le rang. C'est une idée naturelle après la lecture de [DeD97], qui traite cependant uniquement le cas des jacobiniennes isogènes à des produits de courbes elliptiques (voir l'hypothèse (*) page 110 de [DeD97]). On traite le cas général ici en suivant le chemin euclidien tracé par Rémond dans ses articles [Rém00, Rém10], et en ajoutant comme ingrédient la minoration Lang-Silverman proposée dans la nouvelle formulation de [Paz15]. La déduction de la conjecture 1.3 s'obtient alors moyennant quelques efforts techniques supplémentaires. Ce faisant, nous corrigeons donc la proposition 1.9 page 23 de [Paz12] qui est basée sur une version obsolète de Lang-Silverman.

Parallèlement, on montrera dans la dernière partie qu'une variation sur cette inégalité Lang-Silverman, due à Rémond et proposée dans le présent texte, suffit à arriver au même résultat.

Rappelons tout d'abord la version forte sur laquelle repose la première partie.

Conjecture 1.8. (*Lang-Silverman-Pazuki, nouvelle version forte*) Soit $g \geq 1$ un entier. Pour tout corps de nombres K , il existe deux nombres $c_5 = c_5(g, K) > 0$ et $c_6 = c_6(g, K) > 0$ tels que pour toute variété abélienne A/K de dimension g et pour tout fibré en droites ample et symétrique L sur A , pour tout point $P \in A(K)$,

- ou bien il existe une sous-variété abélienne $B \subset A$, $B \neq A$, de degré $\deg_L(B) \leq c_6 \deg_L(A)$ et telle que le point P est d'ordre borné par c_6 modulo B ,
- ou bien on a $\text{End}(A) \cdot P$ est Zariski dense et

$$\hat{h}_{A,L}(P) \geq c_5 \max \left\{ h_{F^+}(A/K), 1 \right\},$$

où $\hat{h}_{A,L}(\cdot)$ est la hauteur de Néron-Tate associée à L et $h_{F^+}(A/K)$ est la hauteur de Faltings de la variété A/K , et les deux cas s'excluent mutuellement.

Cette forme forte de la conjecture est motivée par le théorème 1.4 page 511 de [Da93] et les théorèmes 1.8 et 1.13 de [Paz13]. Des exemples de familles de jacobiniennes de courbes vérifiant cette conjecture sont donnés dans [Mas93] et [Paz13] (exemples valables aussi pour cette forme forte, puisque les jacobiniennes associées sont simples).

C'est un énoncé ambitieux. Il implique notamment une borne uniforme sur le nombre de points de torsion des variétés abéliennes de dimension g fixée sur un corps de nombres K : la *conjecture de torsion forte*. Voyons comment obtenir cette conséquence avant de débiter le travail.

Proposition 1.9. *Supposons vraie la conjecture 1.8. Alors pour tout $g \geq 1$, pour tout corps de nombres K il existe une quantité $c_7(g, K) > 0$ telle que pour toute variété abélienne A de dimension g et définie sur K , on a la majoration $\#A(K)_{\text{tors}} \leq c_7(g, K)$, de plus la quantité $c_7(g, K)$ est exprimable explicitement en termes des quantités apparaissant dans la conjecture 1.8.*

Démonstration. Posons tout d'abord $\overline{c_6} = \max_{1 \leq i \leq g} c_6(i, K)$, qui est une quantité plus grande que 1. Soit P un point de torsion dans $A(K)$. Comme sa hauteur de Néron-Tate est nulle, il ne peut pas tomber dans le second cas de l'alternative fournie par la conjecture 1.8. Il existe donc une sous-variété abélienne stricte B_1 telle que l'ordre de P modulo B_1 est borné par c_6 . Donc il existe un entier $1 \leq N_1 \leq c_6$ tel que $[N_1]P \in B_1$, et *a fortiori* $N_1 \leq \overline{c_6}$. On applique à présent la conjecture 1.8 à $P_1 = [N_1]P \in B_1(K)$ sachant que B_1 est une variété abélienne de dimension strictement inférieure à la dimension de A . Comme P_1 est lui aussi un point de torsion, sa hauteur est nulle et il doit tomber aussi dans le premier cas. On obtient ainsi l'existence de B_2 stricte dans B_1 et de $N_2 \leq \overline{c_6}$ tel que $P_2 = [N_2]P_1 \in B_2(K)_{\text{tors}}$. Comme la dimension des B_i est une suite strictement décroissante, nous avons la garantie de trouver un indice $i_0 \leq g$ tel que $B_{i_0} = 0$, donc $P_{i_0} = 0$ et ainsi $[N_{i_0} \cdots N_2 N_1]P = 0$. L'ordre de $P \in A(K)_{\text{tors}}$ est donc borné par $\overline{c_6}^g$ dans tous les cas.

Si l'exposant du groupe $A(K)_{\text{tors}}$ est borné par un nombre M , alors son cardinal est borné par M^{2g} .

On conclut donc que la quantité $c_7(g, K) = \overline{c_6}^{2g^2}$ convient. □

L'utilisation d'une minoration en famille de la hauteur canonique sur les variétés jacobiniennes fournit alors le résultat suivant.

Théorème 1.10. *Supposons vraie la conjecture 1.8. Soit K un corps de nombres et soit $g \geq 2$ un entier. Il existe une constante $c_9 = c_9(g, K) > 0$ telle que pour toute courbe C de genre g définie sur K ,*

$$\#C(K) \leq c_9^{m_K+1},$$

où m_K désigne le rang de Mordell-Weil de la jacobienne de C sur K . Toute quantité c_9 majorant

$$(2g)^{42g^4} \max \left\{ c_6^{10g^3}, \frac{1}{c_5} \right\},$$

convient, avec $c_6 = c_6(g, K) \geq 1$ et $c_5 = c_5(g, K) > 0$ données dans la conjecture 1.8.

2. COMPTAGE EUCLIDIEN

On donne dans cette section une preuve détaillée du fait qu'une version forte de Lang-Silverman implique une borne uniforme sur le nombre de points rationnels des courbes de genre $g \geq 2$ sur les corps de nombres.

Dans toute la suite, on se place dans le cadre suivant. Soit C une courbe projective lisse et géométriquement connexe, de genre $g \geq 2$ sur un corps de nombres K . On suppose tout d'abord que la courbe possède un point rationnel $P_0 \in C(K)$, dans le cas contraire toute borne supérieure positive donnée sur le cardinal de $C(K)$ sera trivialement valide. La courbe C est alors plongée dans sa jacobienne $\text{Jac}(C)$ par le plongement $j : P \rightarrow (P) - (P_0)$, et on définit un diviseur thêta par $\Theta = j(C) + \dots + j(C)$ où on somme $g - 1$ termes $j(C)$, diviseur fournissant une polarisation principale sur $\text{Jac}(C)$. On considère la jacobienne plongée dans $\mathbb{P}^{4^{2g}-1}$ via le fibré L correspondant à la puissance 16-ième d'un translaté symétrique du diviseur thêta. Par le théorème 5.8 page 118 de [Lan83], on a $\deg_{\Theta}(C) = g$. On aura donc $\deg_L(A) = 2^{4 \dim(A)} \deg_{\Theta}(A) = 16^g g!$ et $\deg_L(C) = 2^{4 \dim(C)} \deg_{\Theta}(C) = 16g$.

Nous allons faire usage de la proposition 3.7 page 527 de [Rém00] dans une version valable uniquement pour les courbes et reprenant les résultats du paragraphe baptisé "Cas des courbes" page 529 de [Rém00], lequel explique comment améliorer les valeurs des constantes dans le

cas particulier qui nous intéresse ici. Cet énoncé est donc numériquement plus efficace qu'une banale spécialisation de la proposition 3.7 page 527 au cas des courbes.

Proposition 2.1. (*Rémond*)

Soit C une courbe de genre $g \geq 2$ plongée dans sa jacobienne $A = \text{Jac}(C)$ comme précédemment dans un espace projectif ambiant \mathbb{P}^n avec $n = 4^{2g} - 1$, soit Γ un sous-groupe de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ de rang fini r . Soit c_{NT} une constante majorant la différence entre la hauteur de Weil et la hauteur de Néron-Tate sur A , relativement au plongement donné. Soit h_1 la hauteur de la famille de polynômes définissant l'addition sur A , relativement au plongement donné. On pose alors

$$c_8^2 = 2^{195+12g} g^{11} \max\{1, c_{NT}, h_1\},$$

et on a l'alternative suivante, où au moins une des assertions est vérifiée :

– ou

$$\#(C \cap \Gamma) \leq (2^{172+8g} g^{12})^r,$$

– ou il existe un point $y \in C \cap \Gamma$ tel que

$$\#\{x \in C \cap \Gamma \mid \widehat{h}(x - y) \geq 4c_8^2\} \leq (2^{172+8g} g^{12})^r.$$

Démonstration. Le cœur de la preuve est bien entendu détaillé dans [Rém00] pages 527-529. On demandera au lecteur de se référer au texte original pour les arguments clefs de la preuve de cette proposition. Nous donnons ici les valeurs des quantités correspondant à notre contexte. Tout d'abord comme $g \geq 2$, l'union des translatés de sous-variétés abéliennes contenues dans C est vide, on a donc $Z_C = \emptyset$ dans la notation de [Rém00]. La quantité c_5 apparaissant dans [Rém00] vient de la Proposition 3.6 page 526, mais est améliorée par le paragraphe traitant le cas particulier des courbes page 529, notre c_8 est donc donné par $c_8^2 = 2^{20} \Lambda^2 c_{NT} + 2(n+1) \Lambda^{28/3} \max\{((n+1)D+1)(c_{NT}+3\log(n+1)), \Lambda^{-1}h_1\}$, où $\Lambda = \max\{(\deg_L(C))^2, 2^{14} \deg_L(C)\} = 2^{18}g$ en vertu de $\deg_L(C) = 16g$. En majorant légèrement plus on voit que $2^{195+12g} g^{11} \max\{1, c_{NT}, h_1\}$ convient.

Le majorant figurant dans l'alternative est donné par $(3(n+1)^2 D^{12})^{m_K}$ dans [Rém00] page 529, ce qui fournit la valeur proposée ici en tenant compte de $n = 4^{2g} - 1$ et de $D = \max\{2^{14}, \deg_L(C)\} \leq 2^{14}g$. □

On donne à présent un lemme utile, une estimation sur la taille du rayon discriminant les points “petits” des points “grands” dans le comptage euclidien qui suivra.

Lemme 2.2. Soit C une courbe de genre $g \geq 2$. Nous conservons le même cadre que précédemment, un plongement θ de la jacobienne $\text{Jac}(C)$ dans \mathbb{P}^n , avec $n = 4^{2g} - 1$, correspondant à un translaté de la puissance seizième du diviseur θ . Soit $h_\Theta(A)$ la hauteur θ de la variété abélienne $A = \text{Jac}(C)$ dans ce plongement et considérons la quantité c_8^2 pour ce plongement de A dans \mathbb{P}^n . Alors en utilisant les notations précédentes

$$c_8^2 \leq 2^{204+14g} g^{12} h_\Theta(A).$$

Démonstration. On part de la valeur explicite de la proposition précédente

$$c_8^2 = 2^{195+12g} g^{11} \max\{1, c_{NT}, h_1\},$$

et on trouve dans [DaPh02] les majorations (page 652, page 662 et page 665),

$$h_1 \leq 2(4^g - 1)h_\Theta(A), \quad c_{NT} \leq (4^{g+2}h_\Theta(A) + 6g \log 2) \deg_L(C).$$

Comme plus haut, C est plongée dans sa jacobienne par un plongement thêta, on a alors dans $\mathbb{P}^{4^{2g}-1}$ la valeur $\deg_L(C) = 16g$, où L correspond au plongement d'une puissance seizième du diviseur thêta. Ceci implique

$$c_8^2 \leq 2^{195+12g} g^{11} \max\{1, 2^{2g+9} g, 2^{2g+1}\} h_\Theta(A),$$

et on obtient donc

$$c_8^2 \leq 2^{204+14g} g^{12} h_\Theta(A).$$

□

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème 1.10 de l'introduction, dont on rappelle ici l'énoncé sous forme de corollaire.

Corollaire 2.3. *(de la conjecture 1.8, et de 2.1 et 2.2) Supposons vraie la conjecture 1.8. Soit K un corps de nombres et soit $g \geq 2$ un entier. Il existe une constante $c_9 = c_9(g, K) > 0$ telle que pour toute courbe C de genre g définie sur K ,*

$$\#C(K) \leq c_9^{m_K+1},$$

où m_K désigne le rang de Mordell-Weil de la jacobienne de C sur K . Toute quantité c_9 majorant

$$(2g)^{42g^4} \max\left\{c_6^{10g^3}, \frac{1}{c_5}\right\},$$

convient, avec $c_6 = c_6(g, K) \geq 1$ et $c_5 = c_5(g, K) > 0$.

Démonstration. Soit A la jacobienne de C et soit m_K le rang de $A(K)$. On considère $C(K)$ comme un sous-ensemble de $A(K)$. Notons comme toujours \hat{h} la hauteur de Néron-Tate sur A associée au plongement thêta dans $\mathbb{P}^{4^{2g}-1}$. Nous allons en fait borner $\#C(K)$ en majorant $\#(C \cap A(K))$.

D'après la proposition 2.1, il suffit de traiter le cas où il existe un point $y \in C(K)$ tel que

$$\#\left\{x \in C(K) \mid \hat{h}(x - y) \geq 4c_8^2\right\} \leq N,$$

où N est en fait un entier explicite. On divise les points rationnels en deux clans :

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A(K) \mid \hat{h}(x - y) \leq 4c_8^2\right\}, \\ S_2 &= \left\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A(K) \mid \hat{h}(x - y) \geq 4c_8^2\right\}. \end{aligned}$$

Notre entreprise de majoration de $\#C(K)$ commence par la remarque triviale $C(K) \subset S_1 \cup S_2$. On majore alors le cardinal des deux ensembles auxiliaires S_1 et S_2 .

Invoquons tout d'abord la proposition 2.1, qui fournit directement

$$(1) \quad \#S_2 \leq (2^{172+8g} g^{12})^{m_K}.$$

Pour borner le cardinal de S_1 , il faut travailler un peu plus. On adapte ici deux techniques respectivement exposées dans [DeD97] et dans [Rém00] à notre situation. L'ensemble $(A(K) \otimes \mathbb{R}, \hat{h})$ est un espace euclidien, on gardera les mêmes notations pour l'image des points de $A(K)$ dans cet espace. Le fait que \hat{h} est une forme quadratique définie positive sur cet espace euclidien est classique (mais non trivial de prime abord, comme remarqué par Cassels), une preuve est donnée par exemple par la proposition B.5.3 de [HiSi00] page 201.

Soit $B_o(P, \rho)$ la boule ouverte euclidienne de centre P et rayon ρ (pour le carré de la métrique euclidienne). Citons un énoncé utile démontré par Rémond et figurant au lemme 6.1 page 541 de [Rém00].

Lemme 2.4. (Rémond) *Soit r un entier et $\rho > 0$ un réel. Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^r contenu dans une boule euclidienne de rayon ρ . Pour tout nombre réel $\gamma \geq 1$, on peut trouver $\lfloor (2\gamma + 1)^r \rfloor$ boules de rayon ρ/γ , centrées en des points de S et telles que leur union recouvre tout S .*

Nous pouvons illustrer la situation sur un dessin (en deux dimensions, certes). Les points noirs désignent les points de S . On recouvre tout S en choisissant des points centrés sur les “paquets” de points éventuellement regroupés et en faisant grandir le rayon des petits cercles jusqu’à ρ/γ .

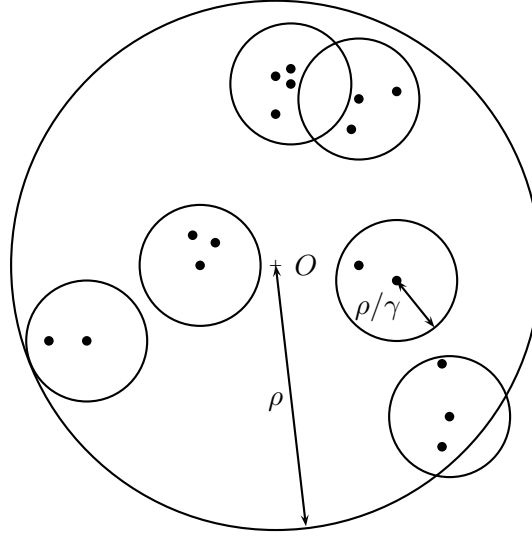


Illustration du
lemme 2.4

On va appliquer ce lemme à $S = S_1 \subset B_o(y, 4c_8^2)$. Ici $\rho = 4c_8^2$ et $r = m_K$, donc en prenant $\gamma = 4c_8^2/c_5 \max\{1, h_{F^+}(A/K)\}$ on obtient l'existence d'un ensemble fini $I \subset S_1$ de cardinal inférieur à $(1 + 8c_8^2/c_5 \max\{1, h_{F^+}(A/K)\})^{m_K}$ tel que

$$S_1 \subset \bigcup_{P_0 \in I} B_o(P_0, c_5 \max\{1, h_{F^+}(A/K)\}).$$

Comme $S_1 \subset C(K)$, on obtient

$$S_1 \subset \bigcup_{P_0 \in I} B_o(P_0, c_5 \max\{1, h_{F^+}(A/K)\}) \cap C(K).$$

Or tout point de $B_o(P_0, c_5 \max\{1, h_{F^+}(A/K)\})$ vérifie $\hat{h}(P - P_0) < c_5 \max\{1, h_{F^+}(A/K)\}$, donc par la Conjecture 1.8 il existe une sous-variété abélienne stricte B avec $\deg_L(B) \leq c_6 \deg_L(A)$ et un entier naturel $1 \leq N \leq c_6$ tel que $[N](P - P_0) \in B$. Tout point $P \in C(K)$ tel

que $[N]P$ appartient à $B + [N]P_0$ est en fait un point vivant sur $[N]^{-1}(B + [N]P_0) \cap C$. On a bien sûr $\dim([N]^{-1}(B + [N]P_0) \cap C) \leq 1$. Comme la courbe C est plongée dans sa jacobienne $\text{Jac}(C)$ par un plongement Θ (polarisation principale), elle vérifie $\deg_{\Theta}(C) = g$ et ne peut donc pas, dès que $g \geq 2$, être contenue dans un translaté de sous-variété abélienne stricte par le critère de Matsusaka-Ran, *confer* [BiLa04] 11.8.1 page 341. Donc $\dim([N]^{-1}(B + [N]P_0) \cap C) = 0$ et on majore le degré de l'intersection par le théorème de Bézout $\deg_L([N]^{-1}(B + [N]P_0) \cap C) \leq \deg_L([N]^{-1}(B + [N]P_0)) \deg_L(C)$. Par la proposition 2.3 page 9 de [DaHi00] on obtient $\deg_L([N]^{-1}(B + [N]P_0)) = N^{2\text{codim}(B)} \deg_L(B)$. On déduit donc

$$\deg_L([N]^{-1}(B + [N]P_0) \cap C) \leq N^{2g} \deg_L(B) \deg_L(C).$$

Soit \mathcal{B} l'ensemble des sous-variétés abéliennes de A de degré borné par $c_6 \deg_L(A)$. On obtient alors la majoration suivante, en vertu de $N \leq c_6$ et de $\deg_L(C) = 16g$:

$$(2) \quad \#S_1 \leq 16gc_6^{2g} \sum_{P_0 \in I} \sum_{B \in \mathcal{B}} \deg_L(B),$$

donc comme pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a $\deg_L(B) \leq c_6 \deg_L(A)$, il vient

$$(3) \quad \#S_1 \leq 16gc_6^{2g} \#I \# \mathcal{B} c_6 \deg_L(A)$$

et donc avec $\deg_L(A) = 16^g g!$

$$(4) \quad \#S_1 \leq 16^{g+1} g! g c_6^{2g+1} \#I \# \mathcal{B}.$$

On va à présent majorer les différents termes du membre de droite de (4). Commençons par $\#I$. Le majorant de c_8^2 donné dans le lemme 2.2 montre que

$$(5) \quad \#I \leq \left(1 + \frac{8 \cdot 2^{204+14g} g^{12} h_{\Theta}(A)}{c_5 \max\{1, h_{F^+}(A/K)\}} \right)^{m_K}.$$

Pour comparer la hauteur thêta et la hauteur de Faltings explicitement, on invoque [Paz12] (basé sur une stratégie de Bost et David) ou le corollaire 1 de l'annexe de [Paz15b] (par David et Philippon) afin d'obtenir

$$h_{F^+}(A/K) \geq h_{F^+}(A/\overline{\mathbb{Q}}) \geq 2h_{\Theta}(A) - \frac{g}{2} \log \max\{1, h_{\Theta}(A)\} - 2M(g),$$

où $M(g) = g4^g$ convient. On divise en deux cas.

Premier cas : si $h_{\Theta}(A) > 2M(g) + \frac{g}{2} \log \max\{1, h_{\Theta}(A)\}$, alors

$$2h_{\Theta}(A) - 2M(g) - \frac{g}{2} \log \max\{1, h_{\Theta}(A)\} > h_{\Theta}(A),$$

donc $h_{F^+}(A/K) > h_{\Theta}(A)$ et par (5) on obtient

$$\#I \leq \left(1 + \frac{2^{208+14g} g^{12}}{c_5} \right)^{m_K}.$$

Second cas : si $h_{\Theta}(A) \leq 2M(g) + \frac{g}{2} \log \max\{1, h_{\Theta}(A)\}$, alors $h_{\Theta}(A) \leq 4gM(g)$ et on utilise cela pour majorer le numérateur dans (5) (tout en minorant le terme au dénominateur par c_5) et ainsi trouver

$$\#I \leq \left(1 + \frac{2^{207+14g} g^{12} (4gM(g) + 1)}{c_5} \right)^{m_K}.$$

Dans les deux cas, en remplaçant $M(g) = g4^g$ on a montré la majoration suivante :

$$(6) \quad \#I \leq \left(\frac{1}{c_5} 2^{210+16g} g^{14} \right)^{m_K}.$$

Revenons à (4) et majorons les autres termes du membre de droite. Par la proposition 4.1 page 529 de [Rém00] on obtient la borne $\#\mathcal{B} \leq (4g!(2g)!(2^g c_6 \deg_L(A))^{2g+1})^{4g^2}$ (cette borne est en fait légèrement moins fine que celle de Rémond, mais plus facile à manipuler). De plus A étant principalement polarisée, on a $\deg_L(A) = 16^g g!$, ce qui donne en majorant brutalement $\#\mathcal{B} \leq 2^{40g^4} g^{24g^4} c_6^{9g^3}$ et par (4) et (6) on obtient

$$(7) \quad \#S_1 \leq 2^{41g^4} g^{25g^4} c_6^{10g^3} \left(\frac{1}{c_5} 2^{210+16g} g^{14} \right)^{m_K}$$

Combinant (1) et (7), un calcul facile donne le résultat. □

3. LANG-SILVERMAN À LA RÉMOND

Nous remercions Gaël Rémond de nous permettre d'inclure ici une autre formulation de la forme forte de Lang-Silverman issue du futur [Rém15]. Pour déduire une borne sur le cardinal $C(K)$, on peut aussi utiliser l'énoncé suivant.

Conjecture 3.1. (*Lang-Silverman-Rémond, nouvelle version forte*) *Pour tout couple d'entiers naturels (d, g) il existe un réel $c_{10} = c_{10}(d, g) > 0$ tel que pour tout corps de nombres K de degré d , pour toute variété abélienne A/K de dimension g et pour toute polarisation L sur A , il existe une sous-variété abélienne stricte B de A de degré $\deg_L(B) \leq c_{10} \deg_L(A)$ et telle que pour tout point $P \in A(K)$, au moins l'une des deux assertions suivantes est vérifiée*

(1) *il existe un entier $1 \leq N \leq c_{10}$ tel que $[N]P \in B$,*

(2)

$$\widehat{h}_{A,L}(P) \geq c_{10}^{-1} \max \left\{ h_{F^+}(A/K), 1 \right\},$$

où $\widehat{h}_{A,L}(\cdot)$ est la hauteur de Néron-Tate associée à L et $h_{F^+}(A/K)$ est la hauteur de Faltings de la variété A/K .

C'est un énoncé qui dit sensiblement la même chose que 1.8 : les points rationnels dont la hauteur est trop petite proviennent en fait d'un translaté d'une sous-variété abélienne stricte. Au regard de l'application qui nous intéresse, cette forme 3.1 est nettement plus maniable que la conjecture 1.8. Si on parcourt le raisonnement exposé plus haut, la même preuve vaut (en faisant de petites retouches aisées, voir plus bas) et on peut simplifier le décompte car il n'est nul besoin de savoir estimer le nombre de sous-variétés abéliennes de degré borné pour tenir compte de l'alternative, il n'y a qu'une seule variété obstructrice B .

Remarque 3.2. Notons une différence entre la conjecture 1.8 et la conjecture 3.1. Prenons le cas d'un point $P = (P_1, 0) \in A = A_1 \times A_2$ avec la polarisation L produit de L_1 sur A_1 et L_2 sur A_2 . On suppose que P_1 n'est pas un point de torsion. On choisit A_2 telle que $h_{F^+}(A_2/K) > 1 + \widehat{h}_{A,L}(P)$, ce qui est possible puisque $\widehat{h}_{A,L}(P) = \widehat{h}_{A_1,L_1}(P_1)$ est indépendant de A_2 . Donc P doit être dans le premier cas. Regardons à présent l'ensemble des itérés de P , la variété A_2 étant fixée. À partir d'un certain rang, la suite de réels positifs $\widehat{h}_{A,L}([k]P)$ dépasse $\max\{1, h_{F^+}(A_2/K)\}$, et donc $[k]P$ passe dans le deuxième cas. C'est un phénomène

qui ne se produit pas dans la conjecture 1.8 où un point exclu du second cas voit tous ses itérés exclus *de facto*.

Remarque 3.3. La conjecture classique (la forme “faible”) propose simplement une minoration de la hauteur canonique d’un point rationnel par la hauteur de Faltings de la variété en imposant des hypothèses nécessaires sur le point. Elle a été fortifiée pour la première fois dans [Paz12], puis la forme forte a été corrigée dans [Paz15] pour donner la conjecture 1.8.

Voyons à présent ce qui change dans le décompte si on fait usage de cette conjecture 3.1.

Corollaire 3.4. *(de la conjecture 3.1, de la proposition 2.1 et du lemme 2.2) Supposons vraie la conjecture 3.1. Soit K un corps de nombres de degré d et soit $g \geq 2$ un entier. Il existe une constante $c_{11} = c_{11}(g, K) > 0$ telle que pour toute courbe C de genre g définie sur K ,*

$$\#C(K) \leq c_{11}^{m_K+1},$$

où m_K désigne le rang de Mordell-Weil de la jacobienne de C sur K . Toute quantité c_{11} majorant

$$c_{10}^{2g+1} 2^{120g} g^{14+g}$$

convient.

Démonstration. On reprend le raisonnement au niveau de (4). En utilisant $\deg_L(C) = 16g$ et $\deg_L(A) = g!$ il vient

$$\#S_1 \leq 16g c_{10}^{2g+1} g! \#I.$$

On majore le cardinal de I par $(c_{10} 2^{210+16g} g^{14})^{m_K}$ par un calcul identique à celui aboutissant à (6). Cela fournit donc

$$(8) \quad \#S_1 \leq 16g c_{10}^{2g+1} g! (c_{10} 2^{210+16g} g^{14})^{m_K}.$$

On a toujours l’inégalité (1) qui nous donne $\#S_2 \leq (2^{172+8g} g^{12})^{m_K}$, un calcul direct conjuguant (1) et (8) et $g \geq 2$ donne la borne annoncée. □

RÉFÉRENCES

- [BhSh15] BHARGAVA, M. ET SHANKAR, A., *Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves*. Ann. of Math. (2) **181.1** (2015), 191–242.
- [BiLa04] BIRKENHAKE, C. ET LANGE, H., *Complex abelian varieties*. Springer-Verlag, second augmented edition, (2004).
- [CaHaMa97] CAPORASO, L., HARRIS, J. ET MAZUR, B., *Uniformity of rational points*. J. Amer. Math. Soc. **10.1** (1997), 1–35.
- [Da93] DAVID, S., *Minoration de hauteurs sur les variétés abéliennes*. Bull. Soc. Math. France **121** (1993), 509–544.
- [DaHi00] DAVID, S. ET HINDRY, M., *Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type CM*. J. Reine Angew. Math. **529** (2000), 1–74.
- [DaNaPh07] DAVID, S., NAKAMAYE, M. ET PHILIPPON, P., *Bornes uniformes pour le nombre de points rationnels de certaines courbes*. Diophantine geometry, CRM Series **4** Ed. Norm., Pisa (2007), 143–164.
- [DaPh02] DAVID, S. ET PHILIPPON, P., *Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. II*. Comment. Math. Helv. **77** (2002), 639–700.

- [DeD97] DE DIEGO, T., *Points rationnels sur les familles de courbes de genre au moins 2*. J. Number Theory **67** (1997), 85–114.
- [Fa83] FALTINGS, G., *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*. Invent. Math. **73** (1983), 349–366.
- [Fa86] FALTINGS, G., *Finiteness theorems for abelian varieties over number fields*. Arithmetic Geometry, Cornell and Silverman (editors), Springer-Verlag (1986), 9–27.
- [HiSi00] HINDRY, M. ET SILVERMAN, J., *Diophantine Geometry : an introduction*. Springer-Verlag, GTM **201** (2000).
- [KaRaZu15] KATZ, E., RABINOFF, J. ET ZUREICK-BROWN, D., *Uniform bounds for the number of rational points on curves of small Mordell–Weil rank*. <http://arxiv.org/abs/1504.00694> (2015).
- [Lan83] LANG, S., *Fundamentals of Diophantine Geometry*. Springer-Verlag New York, (1983).
- [Mas93] MASSER, D., *Large period matrix and a conjecture of Lang*. Séminaire de théorie des nombres, Paris 1991–1992, Progr. Math. **116** (1993), 153–177.
- [Maz86] MAZUR, B., *Arithmetic on curves*. Bull. Amer. Math. Soc. **14.2** (1986), 207–259, DOI 10.1090/S0273-0979-1986-15430-3.
- [Maz00] MAZUR, B., *Abelian varieties and the Mordell–Lang conjecture*. Model theory, algebra, and geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **39** Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000), 199–227.
- [Pac97] PACELLI, P.L., *Uniform boundedness for rational points*. Duke Math. J. **88.1** (1997), 77–102, DOI 10.1215/S0012-7094-97-08803-7.
- [Paz12] PAZUKI, F., *Theta height and Faltings height*. Bull. Soc. Math. France **140.1** (2012), 19–49.
- [Paz13] PAZUKI, F., *Minoration de la hauteur de Néron–Tate sur les surfaces abéliennes*. Manuscripta Math. **142** (2013), 61–99.
- [Paz15] PAZUKI, F., *Heights, ranks and regulators of abelian varieties*. <http://arxiv.org/abs/1506.05165> (2015).
- [Paz15b] PAZUKI, F., *Décompositions en hauteurs locales*. <http://arxiv.org/abs/1205.4525> (2015).
- [Ré00] RÉMOND, G., *Décompte dans une conjecture de Lang*. Invent. Math. **142** (2000), 513–545.
- [Ré05] RÉMOND, G., *Inégalité de Vojta généralisée*. Bull. Soc. Math. France **133.4** (2005), 459–495.
- [Ré10] RÉMOND, G., *Nombre de points rationnels des courbes*. Proc. Lond. Math. Soc. **101.3** (2010), 759–794.
- [Ré15] RÉMOND, G., *Conjectures uniformes sur les variétés abéliennes*. Prépublication. (2015).
- [Sto15] STOLL, M., *Uniform bounds for the number of rational points on hyperelliptic curves of small Mordell–Weil rank*. <http://arxiv.org/abs/1307.1773> (2015).

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF COPENHAGEN, UNIVERSITETSPARKEN 5, 2100 COPENHAGEN Ø, DENMARK, ET INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BORDEAUX, UNIVERSITÉ DE BORDEAUX, 351, COURS DE LA LIBÉRATION, 33405 TALENCE, FRANCE.

E-mail address: fabien.pazuki@math.u-bordeaux.fr